

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: Αξιοσημείωτες Ταυτότητες

1. Να κυκλώσετε το <σωστό> ή το <λάθος>

$(1+2y)^2 = 4y^2 + 1^2$	σωστό/λάθος
$(x-3)^2 = x^2 - 3x + 9$	σωστό/λάθος
$(\alpha - 2\beta)^3 = \alpha^3 - 6\alpha^2\beta - 12\alpha\beta^2 - 8\beta^3$	σωστό/λάθος
$(x + \sqrt{6})(\sqrt{6} - x) = 36 - x^2$	σωστό/λάθος

2. Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα:

α) $(3x+1)^2 =$

β) $\left(1 - \frac{y}{2}\right)^2 =$

γ) $(2x-3y)(3y+2x) =$

δ) $\left(\frac{1}{2}x + y^2\right)^3 =$ ε) $(2\alpha^2 - 3\beta)(3\beta + 2\alpha^2)(9\beta^2 + 4\alpha^4) =$

3. Να συμπληρώσετε τα κενά ώστε να ισχύουν οι ισότητες :

α) $\left(4\alpha^3 - \dots\right)^2 = \dots - \dots + 25\beta^2$

β) $(\dots - \dots)^2 = 9\alpha^2 - 30\alpha\beta + \dots$ γ) $(\dots + \dots)^2 = \dots + 2\alpha^2 + \alpha^4$

4. Να γίνουν οι πιο κάτω πράξεις:

i. $(5x+3)^2 + (2x-5)^2 + (x+1)(x-1) - 2x(x-4) =$

ii. $2(4x-3y)^2 - 3(y-2x)(2x+y) - 4(x+2y)^2 =$

iii. $(5x+3)^2 + (2x-5)^2 + (x+1)(x-1) - 2x(x-4) =$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $(3x-2)^2 + (2x+3)(2x-3) = 2x(7x-22) - (x+3)^2$

ii. $\frac{1}{4} + (x+3)^2 + (x-2)(-x-2) = 3x + \frac{17}{4}$

6. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(\alpha^2 + 4) \cdot (\beta^2 + 9) - (\alpha\beta + 6)^2 = (3\alpha - 2\beta)^2$$

7. Αν ισχύει ότι $x + y = -\frac{1}{3}$ και $xy = -\frac{7}{3}$ να αποδείξετε ότι:

$$(3x+1)^2 + (3y+1)^2 + 9(x+y) = 40$$

8. Να αποδειχθεί ότι το πολυώνυμο A είναι σταθερό με $A=8$:

$$A = \left(\omega + \frac{2}{\omega}\right)^2 - \left(\omega - \frac{2}{\omega}\right)^2 =$$

9. Το μήκος δύο κάθετων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι

$$\left(x^2 - y^2\right) \text{ και } (2xy).$$

Να αποδείξετε πως η υποτείνουσα είναι ίση με $\left(x^2 + y^2\right)$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: Παραγοντοποίηση-Ρητές Αλγεβρικές Παραστάσεις

1. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

α) $4\chi + 4\psi + 8\omega$

β) $3\chi - 3\psi - \omega\chi + \omega\psi$

γ) $9\chi^2 - 16\psi^2$

δ) $\chi^2 - \chi - 30$

ε) $25\chi^2 + 40\chi + 16$

στ) $\psi^3 - 25\psi$

ζ) $16\alpha^2 + 49\beta^2$

η) $-\psi^2 + 8\psi - 15$

2. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

α) $\alpha(\alpha - 2) - \beta(\beta - 2)$

β) $\chi^2 - 6\chi + 9 - 2\beta\chi + 6\beta$

γ) $(\chi - 3\omega)^2 + (\chi - 3\omega) - 6$

δ) $\chi^2 - 6\psi - 1 - 9\psi^2 + 4 - 4\chi$

ε) $16\chi^4 - 81\psi^4$

στ) $3\rho^2 - 3\omega^2 - \omega^2 - 2\rho\omega - \rho^2$

ζ) $\alpha^2(\alpha - 5) + (\alpha - 5)(3\alpha - 2) - 25 + \alpha^2$

η) $\chi^2 - 6\chi\psi + 9\psi^2 - 4\omega^2$

θ) $(\chi^2 - 6\chi + 3)^2 - (\chi - 9)^2$

ι) $4(\chi - 1) + 9\chi^2(1 - \chi)$

3. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

α) $\frac{\chi^2 - 25}{2\chi - 10}$

β) $\frac{5\alpha^2\beta - 5\alpha\beta^2}{\alpha^3\beta - \alpha\beta^3}$

4. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{\chi\psi^2}{\chi^2 + 3\chi - 18} \cdot \frac{4\chi + 24}{\chi\psi}$

β) $\frac{\chi^2 - 8\chi + 12}{\chi^2 - 36} : \frac{3\chi - 6}{\chi^2 + 5\chi - 6}$

γ) $\frac{2\chi}{\chi^2 - 25} + \frac{1}{5 - \chi} - \frac{3}{\chi^2 + 5\chi}$

δ) $\frac{3\chi^2 - 3}{\chi^3 + \chi^2 - 2\chi} : \left(\frac{3}{\chi^2 - 4} + \frac{1}{\chi + 2} \right)$

5. Να γίνουν απλά τα σύνθετα κλάσματα:

$$\alpha) \frac{\frac{\chi - 9\psi}{\psi} - \frac{\chi}{\chi}}{\frac{\chi^2 - 6\chi}{\psi^2} + 9}$$

$$\beta) \frac{\frac{\chi^2 - 16}{\chi^2 + 3\chi - 4}}{\frac{\chi^2 - 4\chi}{\chi^2}}$$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \chi^2 - 8\chi = 0$$

$$\beta) \chi^2 - 64 = 0$$

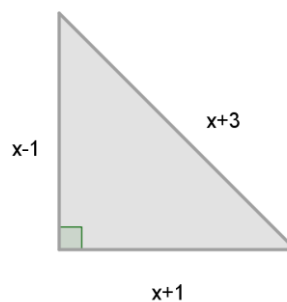
$$\gamma) \chi^2 - 2\chi = 15$$

$$\delta) (\chi + 5)(\chi^2 - 2\chi - 3)(2\chi - 5) = 0$$

$$\epsilon) 3\alpha^2 + 4\alpha - 7 = 0$$

$$\sigma\tau) 25\psi^2 - 20\psi + 4 = 0$$

7. Να βρείτε τη τιμή του χ στο διπλανό σχήμα.



8. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{\chi-2}{\chi} + \frac{4}{\chi-2} = \frac{8}{\chi^2-2\chi}$$

$$\beta) \frac{y+2}{y} = \frac{y+3}{y+4} - \frac{4}{y^2+4y}$$

$$\gamma) \frac{3}{y+5} - \frac{y}{y-5} = \frac{y^2+25}{25-y^2}$$

$$\delta) \frac{2x}{y^2+y} = 1 - \frac{2}{y+1}$$

$$\epsilon) \frac{\rho}{\rho-1} + \frac{6}{\rho^2-1} = 4$$

$$\sigma\tau) \frac{3}{\omega^2-3\omega-4} = \frac{2\omega+5}{\omega^3+2\omega^2+\omega} + \frac{4}{\omega^2-4\omega}$$

$$\zeta) \left(\frac{\chi+1}{\chi-1}\right)^2 - 4\frac{\chi+1}{\chi-1} + 3 = 0$$

$$\eta) \frac{3}{\kappa+2} = \frac{2}{\kappa} + \frac{\kappa-4}{\kappa^2+2\kappa}$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: Γεωμετρία

1. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Λ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

α) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα .	Σ	Λ
β) Σε δύο τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.	Σ	Λ
γ) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, και έχουν μια γωνία αντίστοιχα ίση τότε απαραίτητα θα είναι ίσα.	Σ	Λ
δ) Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια γωνία ίση μία προς μία, και έχουν μια κάθετη πλευρά τους αντίστοιχα ίση τότε απαραίτητα θα είναι ίσα.	Σ	Λ

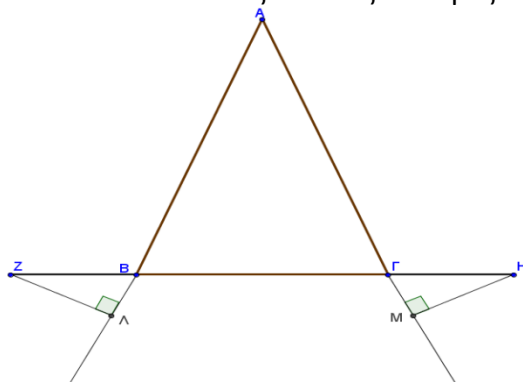
2. Να δείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η διάμεσος ΑΔ είναι ύψος και διχοτόμος.

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$). Αν Μ και Λ είναι μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα να δείξετε ότι :

α) $BL = GM$

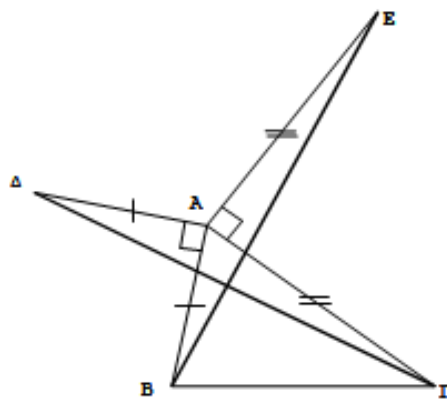
- β) Τα Μ και Λ απέχουν ίση απόσταση από την πλευρά ΒΓ.

4. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) προεκτείνουμε τη βάση ΒΓ κατά τμήματα $BZ = GH$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν ΖΛ και ΗΜ αποστάσεις από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα να δείξετε ότι $ZL = HM$.

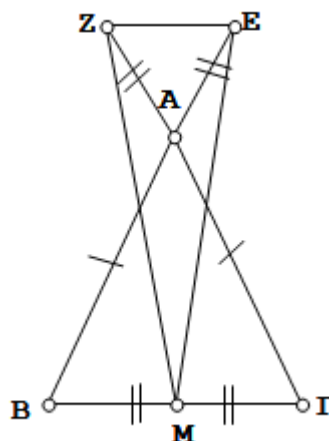


5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$). Αν Κ,Λ,Μ είναι μέσα των πλευρών ΑΒ,ΒΓ,ΑΓ αντίστοιχα να δείξετε ότι $LK = LM$.

6. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma$ είναι τυχαίο τρίγωνο με $AD=AB$, $AE=AG$ και $AD \perp AB$, $AG \perp AE$. Να δείξετε ότι $\Gamma\Delta=BE$.

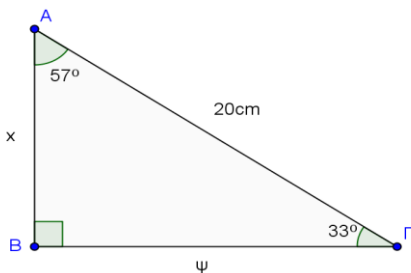


7. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές τρίγωνο ($AB=AG$), M μέσο της $B\Gamma$ και $AZ=AE$. Να δείξετε το τρίγωνο MZE είναι ισοσκελές.



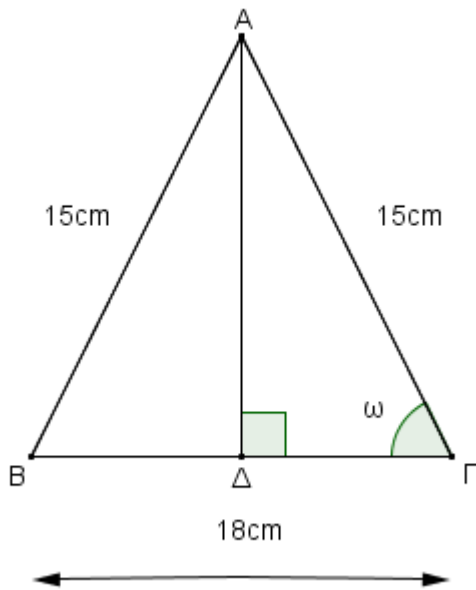
ΕΝΟΤΗΤΑ 4: Τριγωνομετρία

1. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{B}=90^\circ$), να βρείτε τα μήκη των πλευρών χ και ψ κατά προσέγγιση δεκάτου.



$\eta\mu 33^\circ = 0,545$	$\sigma\upsilon\nu 33^\circ = 0,839$	$\epsilon\phi 33^\circ = 0,649$
$\eta\mu 57^\circ = 0,839$	$\sigma\upsilon\nu 57^\circ = 0,545$	$\epsilon\phi 57^\circ = 1,540$

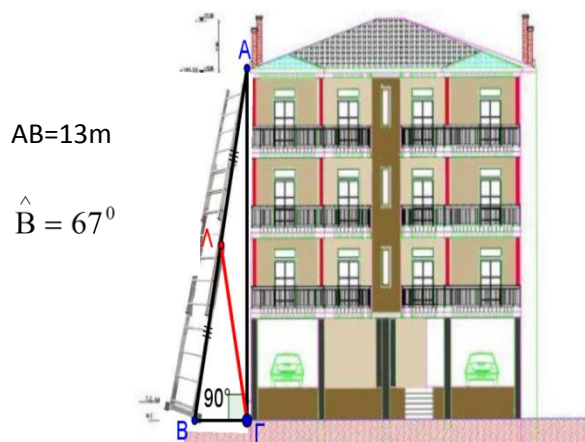
2. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .



3. Στην πιο κάτω εικόνα έβαλαν μια σκάλα για να φτιάξουν τη στέγη της πολυκατοικίας. Το $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο και το ύψος της σκάλας είναι $AB=13\text{m}$, ενώ η γωνία $\hat{B} = 67^\circ$. Να βρείτε ποίους τριγωνομετρικούς αριθμούς θα χρησιμοποιήσετε για να υπολογίσετε:

α) το ύψος της πολυκατοικίας κατά προσέγγιση ακεραίου.

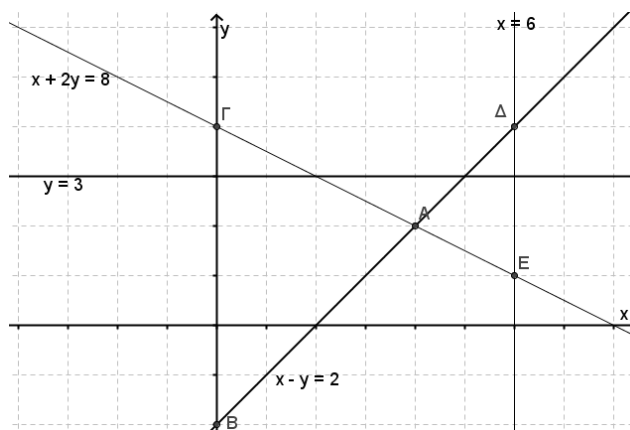
β) την απόσταση $B\Gamma$ της σκάλας από τον τοίχο του σπιτιού κατά προσέγγιση ακεραίου



γωνία	ημ	συν	εφ
23°	0,3907	0,9205	0,4245
67°	0,9205	0,3907	2,356

ΕΝΟΤΗΤΑ 5: Γραμμικά Συστήματα - Ευθεία

1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(2, -3)$ και έχει κλίση $\lambda = 4$.
2. Ποια είναι η εξίσωση της ευθείας :
 - α) που διέρχεται από τα σημεία $(-5, 3)$ και $(2, 3)$
 - β) που διέρχεται από τα σημεία $(2, 4)$ και $(2, -6)$
 - γ) που περνά από το σημείο $(3, -6)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία $3x - y = 5$
 - δ) που περνά από το σημείο $(-10, 3)$ και κάθετη με την ευθεία $y = 5x - 3$
3. Να βρεθεί ο a ώστε οι ευθείες $y = 2x - 5$ και $y = (2a - 7)x + 9$ να είναι :
 - α) παράλληλες.
 - β) κάθετες.
4. Δίνονται οι πιο κάτω γραφικές παραστάσεις:



- α) Με τη βοήθεια των πιο πάνω γραφικών παραστάσεων να λύσετε τα πιο κάτω συστήματα :
 - i) $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$
 - ii) $\begin{cases} y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$
 - iii) $\begin{cases} x = 6 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$
 - iv) $\begin{cases} y = 0 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$
 - v) $\begin{cases} x = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$
- β) Να αποδείξετε ότι εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι τετραπλάσιο από το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta E$.

5. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \quad \begin{cases} x - y = 9 \\ x + y = 13 \end{cases}$$

$$\beta) \quad \begin{cases} 3x - y = 12 \\ 2x + 3y = 19 \end{cases}$$

$$\gamma) \quad \begin{cases} 2\alpha - 3\beta = -6 \\ \alpha - 2\beta = -5 \end{cases}$$

$$\delta) \quad \begin{cases} 3\varphi + 5\omega = 50 \\ 4\varphi + 3\omega = 41 \end{cases}$$

$$\epsilon) \quad \begin{cases} \frac{2x}{5} - \frac{y}{3} = \frac{8}{3} \\ x = 2(y + 1) \end{cases}$$

$$\sigma\tau) \quad \begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 17 \\ \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 12 \end{cases}$$

6. Δίνεται η ευθεία $(\lambda + \mu)x + (2\mu - \lambda)y = 3$. Να βρεθούν οι αριθμοί λ και μ ώστε η πιο πάνω ευθεία να διέρχεται από τα σημεία $(2,5)$ και $(-1,-7)$.

7. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (a + \beta)x + 2a + \beta = 4$. Να βρείτε τους αριθμούς a και β ώστε η εξίσωση να έχει λύσεις τους αριθμούς 2 και -3.

8. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + ax^2 + \beta x - 6$. Αν ισχύει ότι $f(-1) = 0$ $f(2) = 0$ να βρείτε τις τιμές των a και β .

9. Σε μια κατασκήνωση υπάρχουν 260 παιδιά, τα οποία μένουν σε 50 σκηνές των 4 ατόμων και 6 ατόμων. Αν όλες οι σκηνές είναι γεμάτες να βρείτε πόσες είναι οι σκηνές των 4 ατόμων και 6 ατόμων.

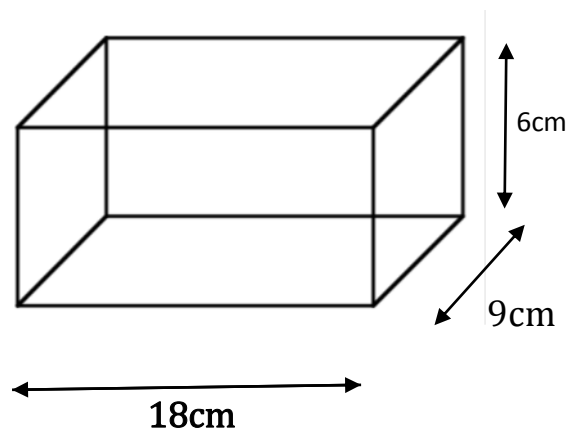
10. Σε ένα τηλεοπτικό παιχνίδι σε κάθε παίκτη υποβάλλονται 10 ερωτήσεις και για κάθε σωστή απάντηση προστίθενται βαθμοί, ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρούνται βαθμοί. Κάποιος παίκτης έδωσε 7 σωστές απαντήσεις και συγκέντρωσε 52 βαθμούς ενώ κάποιος άλλος απάντησε σωστά 4 ερωτήσεις και πήρε 4 βαθμούς συνολικά. Πόσους βαθμούς παίρνει για κάθε σωστή απάντηση και πόσους βαθμούς του αφαιρούνται για κάθε λανθασμένη απάντηση;

11. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(1,4) Β(-2,5) και Γ(-1,3).

- α) Να υπολογίσετε τις κλίσεις των πλευρών του τριγώνου.
- β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
- γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΓΔ του τριγώνου.
- δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ.

ΕΝΟΤΗΤΑ 7: Στερεομετρία

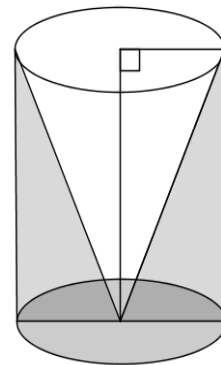
1. Κύλινδρος έχει όγκο $90\pi \text{ cm}^3$ και ύψος 10 cm . Να βρείτε την ολική του επιφάνεια.
2. Το μήκος της βάσης κώνου είναι $10\pi \text{ cm}$ και το ύψος του 12 cm . Να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής του επιφάνειας.
3. Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κύβου είναι 144 cm^2 . Να υπολογίσετε την ολική του επιφάνεια και τον όγκο του.
4. Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας κυλίνδρου είναι $251,2 \text{ cm}^2$ και η ακτίνα του 5 cm . Να υπολογίσετε τον όγκο του κυλίνδρου.
5. Η ακτίνα κώνου είναι 6 cm και το ύψος του 8 cm . Να υπολογίσετε την ολική του επιφάνεια και τον όγκο του.
6. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδό βάσης 144 cm^2 και εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας 240 cm^2 . Να βρείτε τον όγκο της.
7. Κανονικό τετραγωνικό πρίσμα έχει πλευρά βάσης 6 cm και ύψος 10 cm . Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας και τον όγκο του.
8. Ορθό τριγωνικό πρίσμα έχει βάση ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 6 cm και 8 cm . Αν το ύψος του πρίσματος είναι 20 cm να βρείτε την παράπλευρη επιφάνεια και τον όγκο του.
9. Σφαίρα έχει όγκο $36\pi \text{ cm}^3$. Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας της.
10. Ένα κουτί με σχήμα **ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο** και με διαστάσεις 18 cm , 9 cm και 6 cm , είναι γεμάτο με σοκολατάκια **σχήματος κύβου**, με ακμή 3 cm . Να βρείτε **πόσα σοκολατάκια** χωρούν στο κουτί.



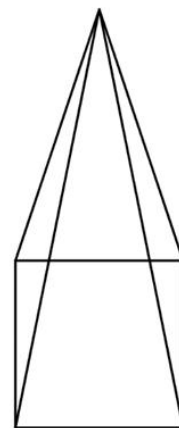
11. Στο διπλανό σχήμα, το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου είναι $135\pi \text{ cm}^2$ και η περίμετρος της βάσης του κυλίνδρου είναι $18\pi \text{ cm}$.

Να υπολογίσετε: (Οι απαντήσεις σας να δοθούν συναρτήσει του π)

- i. Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου.
- ii. Τον όγκο της σκιασμένης περιοχής του στερεού.



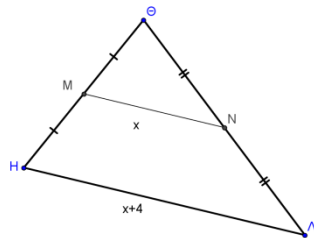
12. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδό βάσης ίσο με 100 m^2 και παράπλευρο ύψος ($h = 13 \text{ cm}$). Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο της πυραμίδας.



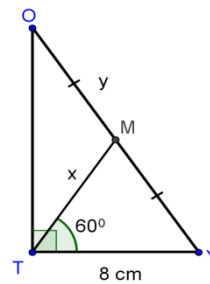
ΕΝΟΤΗΤΑ 9: Παραλληλόγραμμα-Τραπέζια

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ε. Αν η παράλληλη από το Ε προς τη ΒΓ τέμνει την ΑΒ στο Ζ, να αποδείξετε ότι:
 - α) ΒΖΕΔ παραλληλόγραμμο β) ΑΕ=ΒΖ
2. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, Μ είναι το μέσο της ΑΔ. Φέρουμε την ΒΜ και την προεκτείνουμε κατά τμήμα ΒΜ=ΜΕ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΔΕ είναι παραλληλόγραμμο.
3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΑΔ=ΑΒ και την ΑΓ κατά τμήμα ΑΕ=ΑΓ. Να δείξετε ότι το ΒΓΔΕ είναι ορθογώνιο.
4. Στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ τετραγώνου ΑΒΓΔ, παίρνουμε σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, ώστε ΑΕ = ΒΖ. Να αποδείξετε ότι :
 - α) $AZ = ΔE$
 - β) $AZ \perp ΔE$
5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Αν Μ, Ν, Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα να δείξετε:
 - α) Το τετράπλευρο ΜΝΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο
 - β) Το τρίγωνο ΝΛΝ είναι ισοσκελές.
6. Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τα χ και γ

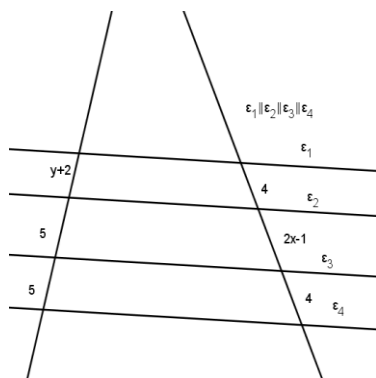
α)



β)



γ)



δ)

